ALGEBRA M1 – Lista 5
Przestrzenie liniowe

Zad. 1. Sprawdzić liniową niezależność wektorów przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$:

(a) $A = \{(1,2),(2,1)\}$

(b) $A = \{(1,2),(2,1),(1,0)\}$.

Zad.2. Zbadać liniową niezależność zbiorów wektorów z przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$:

(a) $A = \{(1,2,0),(-2,1,1),(-1,3,1)\}$

(b) $A = \{(1,1,0),(1,2,0),(0,0,1)\}$

Zad.3. Załóżmy, że każde dwa spośród wektorów v, w, u sa liniowo niezależne. Czy wektory v, w, u muszą byc liniowo niezależne?

Zad.4. Wykazać, że jeżeli zbiór wektorów A w przestrzeni liniowej V jest liniowo niezależny oraz $v \in V \setminus A$, to zbiór $A \cup \{v\}$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy $v \notin \mathrm{Lin}A$.

Zad.5. Załóżmy, że wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ z przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ są liniowo niezależne. Zbadać liniową niezależność następujących wektorów:

(a) $v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$

(b) $v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1$

(c) $v_1, v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n$

Zad.6. Zbadać liniową niezależność podanych wielomianów w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]$ nad ciałem $\mathbb{R}$

(a) $x^4 + 1, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1$

(b) $x^3 + x^2, x^2 - 1, x^3 - x^2 - 1$

Zad.7. Wyznaczyć jakąś bazę podanych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$ lub $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$:

(a) $W = \{(t, t+s, 0, s) : s, t \in \mathbb{R}\}$,

(b) $W = \mathrm{Lin}((1,0,1,0),(0,1,-1,1),(1,1,0,1))$,

(c) $W = \mathrm{Lin}(1, x-1, x+1, x^2-1)$.

Zad.8. Uzupełnić do bazy zbiory wektorów

(a) $A = \{(6,-1,5),(-3,0,2)\}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$

(b) $A = \{x+1, x^2+x+1, x^3-1\}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_3[x]$ nad $\mathbb{R}$

Zad.9. Wyznaczyć wymiar podprzestrzeni przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Zad.10. Załóżmy, że $\dim V = n$ w zadaniu 5. Które z podanych zbiorów wektorów tworzą bazy przestrzeni V? Wyznaczyć współrzędne wektora $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ w każdej z nich.

Zad.11. Wykazać, że jeżeli $\dim V = n$, to przestrzeń liniowa V zawiera podprzestrzenie wszystkich wymiarów $k \leq n$.

Zad.12. Określić wymiar przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_n[x]$ nad $\mathbb{R}$ oraz wymiar jej podprzestrzeni złożonych z tych wielomianów, które mają pierwiastek równy a, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Zad.13. Znaleźć w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$ współrzędne wektora $(3, 2, 3)$ w bazie

(a) $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

(b) $A = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$.

Zad.14. Dane są współrzędne wektora $X \in \mathbb{R}^3$ w bazie $B = \{v_1, v_2, v_3\}$,

$$X = (2, 1, 3)_B.$$

Znaleźć współrzędne tego wektora w bazie $B' = \{v_1, 2v_1 + v_2, v_1 - v_2 + v_3\}$.

Romuald Lenczewski